FONCTIONS RECI PROQUES CH4 TOME I

EX 28 :

partie A :

$f(x)=\sqrt{1+tgx}$; $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

1) a) * pour $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$, $tgx>-1 \Rightarrow 1+tgx>0$

* la fonction : $x\mapsto 1+tgx$ est dérivable et strictement positive sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

d'où f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

* $f'(x)=\frac{1+tg^2x}{2\sqrt{1+tgx}}$

b) $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

$$\frac{f(x)-f(-\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{1+tgx}}{x+\frac{\pi}{4}}=(\frac{1+tgx}{x+\frac{\pi}{4}}).\frac{1}{\sqrt{1+tgx}}$$

* $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+}\frac{1}{\sqrt{1+tgx}}=+\infty$

* on pose : $\varphi(x)=1+tgx$; φ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

et $\varphi'(x)=1+tg^2x$

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+}\frac{1+tgx}{x+\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(-\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}}=\varphi'(-\frac{\pi}{4})=2$$

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+}\frac{f(x)-f(-\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+}(\frac{1+tgx}{x+\frac{\pi}{4}}).\frac{1}{\sqrt{1+tgx}}=+\infty$$

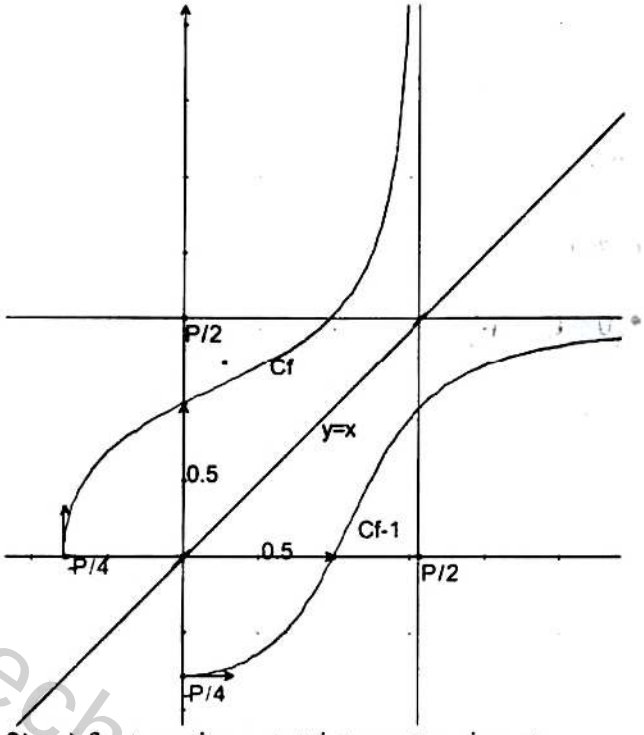
f n'est pas dérivable en $(-\frac{\pi}{4})$ à droite

* (ζ_f) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse $(-\frac{\pi}{4})$

c) pour $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

$f'(x)=\frac{1+tg^2x}{2\sqrt{1+tgx}}>0$

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f '(x)	|	+	
f(x)	0	↗	$+\infty$



2) a) f est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ elle réalise donc une bijection de $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ sur $J=[0,+\infty[$

b) $g=f^{-1}$

$f(-\frac{\pi}{4})=0\to g(0)=-\frac{\pi}{4}$

$f(0)=1\to g(1)=0$

$f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\to g(\sqrt{2})=\frac{\pi}{4}$

c) $(\zeta_g)=S_\Delta(\zeta_f)$ avec Δ : y=x(voir figure)

3) (ζ_g) admet une demi tangente horizontale au point d'abscisse 0

Qarray.tn Aqra Blech Qarray.tn